अनुक्रमांक .....

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम .....

131

324 (EY)

2024

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] *[पूर्णांक : 100*

निर्देश :

(i) *प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में कुल **नौ** प्रश्न हैं ।*

(iii) ***सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(iv) *प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।*

(v) *प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।*

(vi) *प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।*

(vii) *जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।*

---

1. ***सभी*** खण्ड कीजिए ।

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए ।

(क) यदि A एक वर्ग आव्यूह है और $A^2 = A$ है, तो $(A + I)^3 - 7A$ होगा : *1*

(i) A (ii) $3A$

(iii) I (iv) $I - A$

(ख) $\int \cos^2 x \, dx$ का मान होगा : *1*

(i) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + c$ (ii) $-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x}{4} + c$

(iii) $\cos^2 x - \sin^2 x + c$ (iv) $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{4} + c$

collegedunia
India's largest Student Review Platform

(ग) $-\hat{i}.\hat{i} + \hat{j}.\hat{j} - \hat{k}.\hat{k}$ का मान होगा : 1

(i) 1 (ii) 0

(iii) -1 (iv) 2

(घ) अवकल समीकरण $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 7y = 0$ की घात होगी : 1

(i) 2 (ii) 3

(iii) 6 (iv) 5

(ङ) यदि $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, तो A से B तक फलन होगा : 1

(i) $\{(a, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 4)\}$ (ii) $\{(a, 3), (a, 2), (b, 2), (c, 4)\}$

(iii) $\{(a, 3), (b, 2), (c, 3)\}$ (iv) $\{(a, 2), (b, 4), (b, 3), (c, 4)\}$

2. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

(ख) यदि सदिश $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ लम्बवत् हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए । 1

(ग) यदि $P(A) = 0{\cdot}6$, $P(B) = 0{\cdot}3$ और $P(A \cap B) = 0{\cdot}18$, तो $P(B|A)$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

(घ) $\frac{dy}{dx} = \frac{2+y}{x-2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । 1

(ङ) यदि $x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; $x - y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए । 1

3. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \{a, b, c\}$ तथा $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ है, तो B से A तक फलनों की संख्या तथा इनके बीच एकैकी आच्छादी (bijective) फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए । 2

(ख) यदि $y = A\cos t + B\sin t$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ है । 2

(ग) यदि इकाई सदिश $\hat{a}$ और $\hat{b}$ के बीच का कोण θ हो, तो सिद्ध कीजिए कि
$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$. 2

(घ) बिन्दु $A(3, -2, -5)$ से गुज़रने वाली तथा सदिश $(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ के समान्तर रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

collegedunia
India's largest Student Review Platform

4. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ वर्धमान है । 2

(ख) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

(ग) यदि R_1 तथा R_2 समुच्चय A में दो तुल्यता संबंध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $R_1 \cap R_2$ भी A में एक तुल्यता संबंध है । 2

(घ) यदि $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ सदिश हैं और $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ है, तो $\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

5. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) वक्र $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ख) ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 6 है तथा उनके घनों का योगफल न्यूनतम है । 5

(ग) सिद्ध कीजिए : 5

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

(घ) आलेखीय विधि द्वारा रैखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों

$x + 3y \leq 60,\ x + y \geq 20,\ x \leq y,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

के अन्तर्गत $z = 3x + 8y$ का न्यूनतम तथा अधिकतम मान ज्ञात कीजिए । 5

(ङ) यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन की $x = 2$ पर सांतत्य तथा अवकलनीयता की जाँच कीजिए । 5

collegedunia
India's largest Student Review Platform

6. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) अवकल समीकरण $(x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = y$ को हल कीजिए । 5

(ख) एक विद्यालय में 500 विद्यार्थी हैं जिनमें से 230 लड़के हैं । यह ज्ञात है कि 20% लड़के कक्षा XII में पढ़ते हैं । एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी लड़का है और कक्षा XII में पढ़ता है, उसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 5

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A \cdot \text{adj}\, A = |A| \cdot I$. 5

(घ) सिद्ध कीजिए कि $N \times N$ पर संबंध R जहाँ $(a, b)\, R\, (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ तुल्यता संबंध है । 5

(ङ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ तथा
$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 5

7. कोई **एक** खण्ड कीजिए :

(क) आव्यूह विधि से रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए : 8

$$-x + 3y - 2z = 3$$
$$3x + 2y + 3z = 5$$
$$-2x + y + z = -4$$

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए । 8

8. कोई **एक** खण्ड कीजिए :

(क) (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 3

(ii) सिद्ध कीजिए : 5

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x)\, dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2$$

(ख) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 8

collegedunia
India's largest Student Review Platform

9. कोई **एक** खण्ड कीजिए :

(क) अवकल समीकरण $(1 + y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)\, dy$ को हल कीजिए । 8

(ख) (i) यदि $\cos y = x \cos (a + y)$ तथा $\cos a \neq \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$$ 4

(ii) यदि $y = (\sin x)^{\tan x}$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए । 4

(English Version)

Instructions :

(i) *First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.*

(ii) *There are in all* ***nine*** *questions in this question paper.*

(iii) ***All*** *questions are compulsory.*

(iv) *In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.*

(v) *Marks allotted to the questions are indicated against them.*

(vi) *Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.*

(vii) *Do not waste your time over a question you cannot solve.*

1. Do ***all*** the parts.

Select the correct alternative of each part and write it in your answer book.

(a) If A is a square matrix and $A^2 = A$, then $(A + I)^3 - 7A$ will be : 1

(i) A (ii) $3A$

(iii) I (iv) $I - A$

(b) The value of $\int \cos^2 x\ dx$ will be : 1

(i) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + c$ (ii) $-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x}{4} + c$

(iii) $\cos^2 x - \sin^2 x + c$ (iv) $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{4} + c$

(c) The value of $-\hat{i}.\hat{i} + \hat{j}.\hat{j} - \hat{k}.\hat{k}$ will be : 1

(i) 1 (ii) 0

(iii) -1 (iv) 2

(d) The degree of the differential equation $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 7y = 0$ will be : 1

(i) 2 (ii) 3

(iii) 6 (iv) 5

collegedunia
India's largest Student Review Platform

(e) If $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, then the function from A to B will be : 1

(i) $\{(a, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 4)\}$

(ii) $\{(a, 3), (a, 2), (b, 2), (c, 4)\}$

(iii) $\{(a, 3), (b, 2), (c, 3)\}$

(iv) $\{(a, 2), (b, 4), (b, 3), (c, 4)\}$

2. Do ***all*** *the* parts :

(a) Find the value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$. 1

(b) If the vectors $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ are perpendicular, then find the value of λ. 1

(c) If $P(A) = 0{\cdot}6$, $P(B) = 0{\cdot}3$ and $P(A \cap B) = 0{\cdot}18$, then find the value of $P(B|A)$. 1

(d) Find the the general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{2+y}{x-2}$. 1

(e) If $x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; $x - y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, then find the value of x and y. 1

3. Do ***all*** the parts :

(a) If $A = \{a, b, c\}$ and $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, then find the number of functions and number of bijective functions from B to A. https://www.upboardonline.com 2

(b) If $y = A\cos t + B\sin t$, then prove that $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$. 2

(c) If the angle between the unit vectors $\hat{a}$ and $\hat{b}$ is θ, then prove that $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$. 2

(d) Find the cartesian equation of the line passing through the point $A(3, -2, -5)$ and parallel to the vector $(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$. 2

4. Do ***all*** the parts :

(a) Find the interval in which the function $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ is increasing. 2

(b) Find the value of $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$. 2

(c) If R_1 and R_2 be two equivalence relations in a set A, then prove that $R_1 \cap R_2$ is also an equivalence relation in A. 2

(d) If $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are vectors and $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, then find the value of $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$. 2

collegedunia
India's largest Student Review Platform

5. Do ***all*** the parts :

(a) Find the area of the part inscribed by the curve $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. 5

(b) Find two numbers such that their sum is 6 and the sum of their cubes is minimum. 5

(c) Prove that : 5

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

(d) Find the minimum and maximum value of L.P.P $z = 3x + 8y$ by graphical method under the following constraints :

$x + 3y \leq 60,\ x + y \geq 20,\ x \leq y,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ 5

(e) If $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ is defined, then check its continuity and differentiability at $x = 2$. 5

6. Do ***all*** the parts :

(a) Solve the differential equation $(x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = y$. 5

(b) There are 500 students in a school in which 230 are boys. It is known that 20% boys are studying in class XII. Find the probability that a randomly chosen student is a boy and is of class XII. 5

(c) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then prove that $A \cdot \text{adj}\, A = |A| \cdot I$. 5

(d) Prove that a relation R on $N \times N$ is defined as $(a, b)\, R\, (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ is an equivalence relation. 5

(e) Find the shortest distance between the lines

$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ and

$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$. 5

collegedunia
India's largest Student Review Platform

7. Do any ***one*** part :

(a) Solve the system of linear equations by matrix method : 8

$$-x + 3y - 2z = 3$$
$$3x + 2y + 3z = 5$$
$$-2x + y + z = -4$$

(b) Find A^{-1}, if the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 8

8. Do any ***one*** part :

(a) (i) Find the value of $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}}\, dx$. 3

(ii) Prove :

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x)\, dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2.$$ 5

(b) Find the value of $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$. 8

9. Do any ***one*** part :

(a) Solve the differential equation $(1 + y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)\, dy$. 8

(b) (i) If $\cos y = x \cos (a + y)$ and $\cos a \neq \pm 1$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$. 4

(ii) If $y = (\sin x)^{\tan x}$, then find $\frac{dy}{dx}$. 4

collegedunia
India's largest Student Review Platform